

一类粘性扩散方程弱解的存在唯一性*

曲程远¹, 魏晓丹²

(1. 大连民族学院理学院, 辽宁 大连 116600;
2. 大连民族学院计算机科学与工程学院, 辽宁 大连 116600)

摘要: 主要考虑一类粘性扩散方程 $\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u) = 0$ 的 Neumann 边值问题。此类方程也称为伪抛物型方程, 它具有丰富的物理背景, 在土壤力学、热传导及流体力学中有着广泛的应用, 与图像恢复也有着密切联系。主要利用不动点方法证明其弱解的存在性, 进一步证明弱解的唯一性。

关键词: 粘性扩散方程; 弱解; 存在性; 唯一性

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2014) 03-0057-05

Existence and Uniqueness of Weak Solutions for a Class of Viscous Diffusion Equations

QU Chengyuan¹, WEI Xiaodan²

(1. Department of Mathematics, Dalian Nationalities University, Dalian 116600, China;
2. College of Computer Science & Technology, Dalian Nationalities University, Dalian 116600, China)

Abstract: The Neumann problem of a class of viscous diffusion equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u) = 0$$

is studied. Such equation is also called pseudo-parabolic equation, which has a rich physics background, and has a wide range of applications in soil mechanics, heat transfer and fluid mechanics, and also is closely related with image restoration. Using the fixed point method, the existence of weak solutions is proved, and the uniqueness of the solution is obtained.

Key words: viscous diffusion equation; weak solution; existence; uniqueness

本文旨在讨论如下粘性扩散方程初边值问题的弱解的存在唯一性,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \operatorname{div}(g(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega, 0 < t < T \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, 0 < t < T \quad (3)$$

其中 Ω 为 \mathbf{R}^n 空间中的有界区域, 边界适当光滑, n

是 Ω 的单位外法向量, $\lambda > 0$, $g(s) = \frac{1}{1+s^2}$,

$G_\sigma(x)$ 表示高斯核 $G_\sigma(x) = \frac{1}{(4\pi\sigma)^{N/2}} \exp(-$

$$|x|^2/4\sigma), \text{ 且 } |\nabla G_\sigma * u| = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial G_\sigma * u}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

方程 (1) 也称为伪抛物型方程, 可以描述多

* 收稿日期: 2014-02-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11226179)

作者简介: 曲程远 (1979年生), 男; 研究方向: 偏微分方程; E-mail: mathqcy@163.com

孔介质中的两相流体^[1], 单向传播的非线性耗散长波^[2]以及人口的聚集^[3]等自然现象。实际上, 方程 (1) 与图像恢复中的 PM 模型也有着密切联系。众所周知自上世纪 80 年代, PDE 方法已开始应用于图像处理领域, 如今 PDE 模型已成为图像恢复的一个有效工具。这其中 PERONA 和 MALIK^[4]提出的 PM 模型 $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla u/k|^2}\right)$ 引起了人们的关注, 因其各向异性扩散的性质, 与其它模型相比能更好地保护边界, 其中 k 为阈值常数。由于 PM 模型很不稳定, 易误判边界, 于是, LIONS 等^[5]给出了改进的 PM 模型 $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla G_\sigma * (u/k)|^2}\right)$ 。ELLIOTT 等^[6]研究了推广的 PM 模型 $\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{1 + |\nabla u/k|^2}\right)$ 。在上述工作的启发下, 本文考虑模型 (1), 不失一般性, 其阈值常数 $k = 1$ 。

近年来, 众多数学工作者开展了对伪抛物型方程的理论研究。如 KAĬKINA 等^[7], CAO 等^[8]建立了具内部源的伪抛物型方程的指标理论; TERRACINA 等^[9]利用伪抛物正则化, 对具 cubic-like 形式响应函数的正倒向非线性扩散方程弱解的存在唯一性做了一系列的讨论。对形如方程 (1) 的非线性伪抛物方程的研究始于上世纪 70 年代, DAVIS 于 1972 年就研究了伪抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial u_{xx}}{\partial t} + \sigma(u_x)_x$ 的初边值问题整体解的存在性。GLADKOV^[10]研究了伪抛物型方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial u_{xx}}{\partial t} + \sigma(u)_{xx}$ 的 Cauchy 问题解的唯一性。然而对问题 (1) - (3) 解的存在唯一性, 还未见完整讨论。在本文中, 我们利用不动点方法给出弱解的存在性, 进一步证明了弱解的唯一性。

本文安排如下: 第一部分证明问题 (1) - (3) 弱解的存在性, 第二部分给出唯一性。

1 弱解的存在性

令空间 $W = \{w \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)); w_t \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))\}$, W 是一个 Banach 空间, 具有范数 $\|w\|_W = \|w\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} + \|w_t\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))}$ 。本文中我们考虑的弱解定义如下

定义 1 称 u 为问题 (1) - (3) 的弱解, 如果

$u \in W$, 满足积分等式

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + \lambda \frac{\partial \nabla u}{\partial t} \cdot \nabla \varphi + g(|\nabla G_\sigma * u|) \nabla u \cdot \nabla \varphi \right) dx = 0, \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad t \in (0, T)$$

并且

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} u(x, t) \xi(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) \xi(x) dx, \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\Omega)$$

为利用 Schauder 不动点定理来证明弱解的存在性, 我们首先讨论如下的线性化问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \operatorname{div}(c(x, t) \nabla u) = 0, \\ x \in \Omega, t \in (0, T) \quad (4)$$

其中 $c(x, t)$ 是一个给定的具有正下界的函数, 且 $\partial c/\partial t$ 有界。由经典理论^[11]可知, 问题 (2) - (4) 弱解的存在唯一性可以利用 Galerkin 方法得到。

命题 1 对任意的 $u_0 \in H^1(\Omega)$, 线性化问题 (2) - (4) 具有唯一弱解 $u \in W$ 。

定理 1 若 $u_0 \in H^1(\Omega)$, 问题 (1) - (3) 存在弱解。

证明 这里我们采用 Schauder 不动点理论来证明。令 $w \in W$, 使得

$\|w\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|w_t\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c_1 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ 其中 c_1 为待定正常数。因为 w , $\partial w/\partial t$ 满足上式, 则有 $\nabla G_\sigma * w$ 和 $\nabla G_\sigma * w_t$ 属于 $L^\infty(0, T; C^\infty(\Omega))$, 且存在依赖于 G_σ 和 Ω 的常数 c_2 , 使得

$$\|\nabla G_\sigma * w\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq c_1 c_2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}, \\ \|\nabla G_\sigma * w_t\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq c_1 c_2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$$

因此有

$$\frac{1}{1 + (c_1 c_2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)})^2} \leq g(|\nabla G_\sigma * w|) \leq 1, \\ \left| \frac{\partial g(|\nabla G_\sigma * w|)}{\partial t} \right| \leq 2c_1 c_2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)} \quad (5)$$

考虑如下问题

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \varphi + \lambda \frac{\partial \nabla u}{\partial t} \cdot \nabla \varphi + g(|\nabla G_\sigma * w|) \nabla u \cdot \nabla \varphi \right) dx = 0, \\ \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad t \in (0, T) \quad (6)$$

由式 (5) 和命题 1, 问题 (6) 具有唯一解 $u_w \in W$ 。

令 $\varphi = u_w$, 代入问题 (6) 并从 0 到 t 上积分有

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_w|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_w|^2 dx +$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} g(|\nabla G_{\sigma} * w|) |\nabla u_w|^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_w(x,0)|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_w(x,0)|^2 dx$$

于是可得

$$\int_{\Omega} |u_w|^2 dx \leq (1 + \lambda) \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2, \int_{\Omega} |\nabla u_w|^2 dx \leq (1 + \frac{1}{\lambda}) \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (7)$$

令 $\varphi = \frac{\partial u_w}{\partial t}$ ，代入问题 (6) 并利用式 (5) 及 Young 不等式有

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_w}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \nabla u_w}{\partial t} \right|^2 dx \leq \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} |\nabla u_w|^2 dx.$$

由式 (7) 有

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_w}{\partial t} \right|^2 dx \leq \frac{1}{2\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2, \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \nabla u_w}{\partial t} \right|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda^2} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (8)$$

取 $\|u_0\|$ 使得 $\|u_w\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u_w}{\partial t} \right\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_1 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}$ ，即 $c_1 \geq \sqrt{1 + \lambda} + \frac{\sqrt{1 + \lambda}}{\sqrt{2\lambda}}$ 。这样

我们确定 c_1 。进一步，由式 (7) 和式 (8) 我们可以得到

$$\left\| \nabla u_w \right\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_3, \left\| \frac{\partial \nabla u_w}{\partial t} \right\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_4 \quad (9)$$

我们引入如下定义的子空间 W_0

$$W_0 = \{w \in W; w \text{ 在弱意义下满足(2) 和(3)}\},$$

$$\|w\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} + \left\| \frac{\partial w}{\partial t} \right\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_1 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}, \|\nabla w\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_3, \left\| \frac{\partial \nabla w}{\partial t} \right\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq c_4 \}$$

为了利用 Schauder 不动点定理，我们需要证明 $P: w \rightarrow u_w$ 从 W_0 到 W_0 弱连续。令 w_j 为 W_0 中一列弱收敛于 w 的序列， $u_j = u_{w_j}$ 。往证 $P(w_j) = u_j$ 弱收敛于 $P(w) = u_w$ 。根据式 (7) - (9) 和 Sobolev 空间中的经典结论，我们可以从 u_j 得到一个收敛于 u 的子列，使得

$w_j \rightarrow w$ 在 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 中且几乎处处处于 $\Omega \times (0, T)$ 上；

$\frac{\partial G_{\sigma}}{\partial x_k} * w_j \rightarrow \frac{\partial G_{\sigma}}{\partial x_k} * w$ 在 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 中且几乎处处处于 $\Omega \times (0, T)$ 上， $k = 1, 2, \dots$ ；

$g(|\nabla G_{\sigma} * w_j|) \rightarrow g(|\nabla G_{\sigma} * w|)$ 在 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 中且几乎处处处于 $\Omega \times (0, T)$ 上；

$u_j \rightarrow u$ 在 $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ 中弱收敛；

$\frac{\partial u_j}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}$ 在 $L^{\infty}(0, T; H^1(\Omega))$ 中弱收敛；

$\frac{\partial \nabla u_j}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \nabla u}{\partial t}$ 在 $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ 中弱收敛；

$u_j \rightarrow u$ 在 $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ 中和且几乎处处处于 $\Omega \times (0, T)$ 上；

$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k}$ 在 $L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ 中弱收敛， $k = 1, 2, \dots$ ；

$u_j(x, 0) \rightarrow u_0(x)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中；

$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x, 0) \rightarrow 0$ 在 $H^1(\Omega)$ 中

通过以上收敛我们得到 $u = P(w)$ 。由于问题 (6) 的解是唯一的，序列 $u_j = P(w_j)$ 在 W_0 中弱收敛于 $u = P(w)$ ，即 P 弱连续。根据 Schauder 不动点定理，存在 $w \in W_0$ 使得 $w = P(w) = u_w$ ，即 u_w 为问题 (1) - (3) 的解。

2 弱解的唯一性

定理 2 问题 (1) - (3) 的弱解是唯一的。

证明 令 u_1, u_2 为 (1) - (3) 两个弱解。则对于几乎每一个 $(0, T)$ 中的 t 和 $i = 1, 2$ ，我们有

$$\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} - \lambda \frac{\partial(\Delta u_1 - \Delta u_2)}{\partial t} -$$

$$\operatorname{div}(\alpha_1 \nabla(u_1 - u_2)) = \operatorname{div}((\alpha_1 - \alpha_2) \nabla u_2), \quad x \in \Omega, 0 < t < T \quad (10)$$

$$u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < t < T \quad (12)$$

其中 $\alpha_i(x, t) = g(|\nabla G_{\sigma} * u_i|)$ 。

令 $0 < s < T$ ，且

$$v_i(\cdot, t) = \begin{cases} \int_t^s u_i(\cdot, \tau) d\tau, & 0 < t \leq s; \\ 0, & s \leq t < T, \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2$ 。于是对于每一个 $0 < t < T$ ， $v_i(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$ ， $\frac{\partial v_i}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$ 。用 $v_1 - v_2$ 乘式 (10) 并在 $\Omega \times (0, s)$ 上积分，利用式 (11) - (12) 和 $(v_1 - v_2)(\cdot, s) = 0$ ，得到

$$\int_0^s \int_{\Omega} (-(u_1 - u_2) \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial t} + \alpha_1 \nabla(u_1 - u_2) \nabla(v_1 - v_2)) dx dt +$$

$$\int_0^s \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial(\nabla u_1 - \nabla u_2)}{\partial t} (\nabla v_1 - \nabla v_2) dx dt = \int_0^s \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\Omega} \lambda |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx dt +$$

$$- \int_0^t \int_{\Omega} (\alpha_1 - \alpha_2) \nabla u_2 \nabla (v_1 - v_2) dx dt \quad \frac{c_5}{2} \int_{\Omega} |\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, 0)|^2 dx \leq$$

由于 $\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = -u(x, t)$, 则有

$$\int_0^s \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\Omega} \lambda |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx dt +$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_1(\cdot, 0) |\nabla (v_1 - v_2)| dx =$$

$$- \int_0^s \left(\int_{\Omega} (\alpha_1 - \alpha_2) \nabla u_2 \nabla (v_1 - v_2) dx + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla (v_1 - v_2)|^2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} dx \right) dt \quad (13)$$

类似于存在性的证明, 存在依赖 G_{σ} , Ω 和 $\|u_{i0}\|_{H^1(\Omega)}$ 的正常数 c_5 和 c_6 使得 $c_5 \leq \alpha_i(\cdot, 0) \leq 1$, $c_5 \leq \alpha_i \leq 1$, $\left| \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \right| \leq c_6$, $x \in \Omega, t \in (0, T), i = 1, 2$ 。根据式 (13) 可以得到

$$\int_0^s \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\Omega} \lambda |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx dt +$$

$$\frac{c_5}{2} \int_{\Omega} |\nabla (v_1 - v_2)(\cdot, 0)|^2 dx \leq$$

$$\int_0^s (\alpha_1 - \alpha_2)_{L^{\infty}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla (v_1 - v_2)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{c_6}{2} \int_{\Omega} |\nabla (v_1 - v_2)|^2 dx dt \quad (14)$$

由于 $g(s)$ 和 G_{σ} 是光滑的, 我们有 $\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq c_7 \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}$, 其中 c_7 是取决于 $g(s)$ 和 G_{σ} 的常数。对式 (14) 使用 Young 不等式, 得到

$$\int_0^s \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\Omega} \lambda |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx dt +$$

$$\frac{c_5}{2} \int_{\Omega} |\nabla (v_1 - v_2)(\cdot, 0)|^2 dx \leq$$

$$c \int_0^s \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla (v_1 - v_2)|^2 dx \right) dt$$

现在我们令 $\omega_i(\cdot, t) = \int_0^t u_i(\cdot, \tau) d\tau, 0 < t < T$, 则上式为

$$c \int_0^s \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, s) - \nabla (w_1 - w_2)(\cdot, t)|^2 dx \right) dt \quad (15)$$

由于 $\|\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, s) - \nabla (w_1 - w_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \|\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, 因此式 (15) 为

$$\int_0^s \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\Omega} \lambda |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx dt +$$

$$\frac{c_5}{2} \int_{\Omega} |\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, 0)|^2 dx \leq$$

$$c \int_0^s \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx + 2 \int_{\Omega} |\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, t)|^2 dt + \right.$$

$$\left. 2c_s \|\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

选取足够小的 T_1 , 使得 $\frac{c_5}{2} - 2T_1 \geq \frac{c_5}{4}$ 。那么如果

$0 \leq s \leq T_1$, 我们便有

$$\int_0^s \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx dt + \int_0^s \int_{\Omega} \lambda |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx dt +$$

$$\int_{\Omega} |\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, s)| dx \leq$$

$$c \int_0^s \left(\int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla (w_1 - w_2)(\cdot, t)|^2 dx \right) dt$$

则由 Gronwall 不等式的积分形式可知在 $(0, T_1]$ 上 $u_1 - u_2 \equiv 0$ 。最后, 在区间 $(T_1, 2T_1], (2T_1, 3T_1]$ 等上进行同样的步骤, 最终在 $(0, T)$ 上得到 $u_1 \equiv u_2$ 。

参考文献:

- [1] VAN DUJIN C J, FAN Y, PELETIER L A, et al. Travelling wave solutions for degenerate pseudo-parabolic equation modelling two-phase flow in porous media [J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 2013, 14(3): 1361 - 1383.
- [2] CUESTA C M. Linear stability analysis of travelling waves for a pseudo-parabolic Burgers' equation [J]. Dynamics of PDE, 2010, 7(1): 77 - 105.
- [3] PADRÓN V. Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward-backward pseudoparabolic equation [J]. Trans Amer Math. Soc, 2004, 356(7): 2739 - 2756.

络解决复杂数据系统的实时性高精度建模与预测问题提供了可借鉴的思路。

参考文献:

- [1] 周辉仁,郑丕涛. 四层 BP 神经网络的一种结构设计方法及应用[J]. 系统仿真学报, 2008, 21(9): 2325 - 2333.
- [2] 周春光,张冰,梁艳春,等. 模糊神经网络及其在时间序列分析中的应用[J]. 软件学报, 1999, 10(12): 1304 - 1309.
- [3] 沈谦,王涛,张德龙. 基于模糊前向神经网络的 PVC 识别方法[J]. 计算机工程与科学, 2000, 22(6): 60 - 62.
- [4] 张雨浓,劳稳超,余晓填,等. 两输入幂激励前向神经网络权值与结构确定[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(15): 102 - 106.
- [5] 张雨浓,曲璐,陈俊维,等. 多输入 Sigmoid 激励函数神经网络权值与结构确定法[J]. 计算机应用研究, 2012, 29(11): 4113 - 4151.
- [6] 肖秀春,张雨浓,姜孝华. MISO 多元广义多项式神经网络及其权值直接求解[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2009, 48(4): 42 - 56.
- [7] 杨文光,闫守峰,文小艳. 双输入型模糊前向神经网络的构建[J]. 湖南师范大学:自然科学学报, 2013, 36(3): 33 - 38.
- [8] 王建军,徐宗本. 多元多项式函数的三层前向神经网络逼近方法[J]. 计算机学报, 2009, 32(12): 2482 - 2488.
- [9] 曹飞龙,张永全,潘星. 构造前向神经网络逼近多项式函数[J]. 模式识别与人工智能, 2007, 20(3): 331 - 335.
- [10] 曹飞龙,徐宗本. 多变元周期函数的神经网络逼近: 逼近阶估计[J]. 计算机学报, 2001, 24(9): 903 - 908.
- [11] ZHANG Y N, WANG J. Recurrent neural networks for nonlinear output regulation [J]. Automatica, 2001, 37(8): 1161 - 1173.
- [12] 张雨浓,杨逸文,肖秀春,等. 样条神经网络的权值直接确定法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(11): 2685 - 2688.
- [13] 吴勃英,王德明. 数值分析原理[M]. 北京:科学出版社, 2007.
- [14] 朱长青. 双三次样条插值函数乘积型计算原理及其应用[J]. 测绘工程, 1998, 7(2): 17 - 21.
- [15] 朱长青. 数值计算方法及其应用[M]. 北京:科学出版社, 2006.
- [16] 史荣昌,魏丰. 矩阵分析[M]. 北京:北京理工大学出版社, 2010.
- [17] 梁学章,李强. 多元逼近理论[M]. 北京:国防工业出版社, 2005.

(上接第 60 页)

- [4] PERNA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Trans on Pattern Anal Machine Intell, 1990, 12(7): 629 - 639.
- [5] CATTÉF, LIONS P, MOREL J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. SIAM J Numer Anal, 1992, 29(1): 182 - 193.
- [6] ELLIOTT C M, GAWRON B, MAIER-PAAPE S, et al. Discrete dynamics for convex and non-convex smoothing functionals in PDE based image restoration [J]. Commun Pure Appl Anal, 2006, 5(1): 181 - 200.
- [7] KAĪKINA E I, NAUMKIN P I, SHISHMAREY I A. The Cauchy problem for a Sobolev type equation with power like nonlinearity [J]. Izv Math, 2005, 69(1): 59 - 111.
- [8] CAO Y, YIN J X, WANG C P. Cauchy problems of semilinear pseudo-parabolic equations [J]. J. Differential Equations, 2009, 246: 4568 - 4590.
- [9] TERRACINA A. Qualitative behavior of the two-phase entropy solution of a forward-backward parabolic problem [J]. SIAM J Math Anal, 2011, 43: 228 - 252.
- [10] GLADKOV A L. Uniqueness solvability of the Cauchy problem for certain quasilinear pseudoparabolic equations [J]. Mathematical Notes, 1996, 60(3): 264 - 268.
- [11] EVANS L C. Partial differential equations [M]. 2nd ed, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.